Feuille d'exercices n° 2

Bases duales et bases antéduales

1 — Sur $E = \mathbb{R}^3$, dans chacun des cas suivants, montrer que les vecteurs suivants forment une base de E et calculer leur base duale.

1) $e_1 = (1, 0, -1)$, $e_2 = (-1, -1, 2)$, $e_3 = (-2, 1, -2)$.
2) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (0, 1, 1)$.
3) $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (1, 1, 1)$.

2 — Sur $E = \mathbb{R}^3$, dans chacun des cas suivants, montrer que les formes linéaires données forment une base de E^* et calculer leur base préduale.

1) $f_1 = (1, 1, -1)$, $f_2 = (1, -1, 1)$, $f_3 = (1, 1, 1)$.
2) $f_1 = (1, 2, 3)$, $f_2 = (2, 3, 4)$, $f_3 = (3, 4, 6)$.
3) $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (1, 1, 0)$.

3 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1) Déterminer A^{-1}.
2) Justifier que la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et trouver sa base duale.

4 — Sur $E = \mathbb{R}^n$, on considère les formes linéaires $f_i(x_1, ..., x_n) = x_i + x_{i+1}, i \in 1, ...n-1$ et $f_n(x_1, ..., x_n) = x_n + x_1$. Déterminer si $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une base de E^* et, le cas échéant, calculer sa base préduale.

5 — 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application lineéaire φ_a par :

$$\forall P \in E, \varphi_a(P) = P(a).$$

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\varphi_a \in E^*$.

2) Soit $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ une famille de complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_0}, \varphi_{a_1}, ..., \varphi_{a_n})$ est une base de $E*$ et calculer sa base préduale.
3) Montrer qu'il existe $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in E, \int_0^1 P(t)dt = \lambda_0 P(a_0) + ... + \lambda_n P(a_n)$$

et donner les λ_i sous forme d'une intégrale.

6 — Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les formes linéaires $f_i(P) = \int_0^1 t^i P(t)dt, i \in 0, 1, 2, 3$. Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) forme une base de E^* et trouver sa base préduale.

7 — Soit $f_1, ..., f_n$ des formes linéaires sur k^n telles qu'il existe $x \in k^n$ non nul tel que $f_1(x) = f_2(x) = ... = f_n(x) = 0$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est liée.

8 — Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $V = \mathbb{R}^4$, soit V^* l'espace dual de V et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

1) Soit P le plan de V engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$ et $v_2 = e_2 + e_3 + e_4$. Pour $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, sous quelles conditions la forme linéaire $f = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^* + a_4 e_4^*$ s'annule-t-elle sur P ?

2) Déterminer une base $(f_1, \dots, f_d)$ du sous-espace $P^\perp = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \quad \forall v \in P\}$ de V^* (où $d = \dim P^\perp$). Puis, de façon équivalente, donner d équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.
3) Considérons maintenant les formes linéaires $\phi = e_1^* + e_2^* - e_3^*$ et $\psi = e_1^* + e_4^*$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace $E = \{v \in V \mid \phi(v) = 0 = \psi(v)\}$ de V.

9 — Soit $V = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ et soit $\mathcal{B}$ la base $(1, X, \dots, X^n)$ de V. Soit ∂ l'endomorphisme de V qui à tout $P \in V$ associe son polynôme dérivé P'. On pose $\partial^i = \partial \circ \cdots \circ \partial$ (i facteurs) pour $i \in \mathbb{N}^*$, et $\partial^0 = \mathrm{id}_V$. On fixe $n = 4$ (mais on peut faire l'exercice pour n arbitraire).

1) Pour $i = 0, \dots, n$, on considère la forme linéaire $\phi_i : V \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \frac{(\partial^i P)(0)}{i!}$; montrer que $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est la base duale $\mathcal{B}^*$ de la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de V.
2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Écrire la matrice A_λ exprimant la famille de vecteurs $\mathcal{C}_\lambda = (1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $\mathcal{C}_\lambda$ est une base de V.
3) Soit u_λ l'endomorphisme de V tel que $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u_\lambda) = A_\lambda$. Si $\mu \in \mathbb{R}$, pouvez-vous déterminer sans calcul la matrice de $u_\mu \circ u_\lambda$ puis celle de u_λ^{-1} ? Sinon, calculez A_λ^{-1}.
4) Soit $\mathcal{C}_\lambda^*$ la base duale de $\mathcal{C}_\lambda$. Écrire la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}_\lambda^*)$.

Opérations élémentaires

10 — On considère dans $\mathbb{R}^5$ le sous-espace L, resp. M, engendré par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant des opérations sur les colonnes de la ou les matrice(s) appropriée(s), donner des bases de L, M, $L + M$ et de $L \cap M$.

11 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 8/3 & 5 & 22/3 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$.

1) En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer $\mathrm{rang}(A)$ et des bases de $\mathrm{im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.
2) Donner une base de F° où F est le sous-espace du dual de $\mathbb{R}^5$ engendré par les formes linéaires $x \mapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$, $x \mapsto 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5$, $x \mapsto 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5$, et $x \mapsto 3x_1 + 2x_2 + \frac{8}{3}x_3 + 5x_4 + \frac{22}{3}x_5$.

12 — Reprendre la question 1 de l'exercice précédent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

Deviner la question suivante et la résoudre !

13 — En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer, en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$, une base de l'image et du noyau de la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 - t & 2 - t & t - 1 & t - 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Déterminants

14 — Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}.$$

15 — Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les déterminants de taille n suivants :

1) $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$

16 — On définit une matrice A par blocs $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où B, C, A sont des matrices carrées de formats respectifs $p, q, p+q$. Montrer que $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$

17 — Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(x_0, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Calculer le déterminant suivant, dit déterminant de Vandermonde :

$$\mathrm{Van}(x_0, ..., x_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

18 — Soit $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$ vérifiant $a_i + b_j \neq 0, \forall i, j$. Calculer le déterminant de Cauchy $C_n = \det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

19 — Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Calculer $\det(A - xI_n)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

20 — 1) Soient $a_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$ n^2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit d la fonction définie par $d(x) = \det(a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer d'.

2) Calculer $d_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$

Corrections

1 — La base duale est composée des fonctions coordonnées dans la base correspondante. On doit donc résoudre $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ pour n'importe quel vecteur $u = (a, b, c)$.

1) On obtient $x = -2b-c, y = \frac{1}{3}(-a-4b-c), z = \frac{1}{3}(-a-b-c)$, donc $e_1^* = (0, -2, -1), e_2^* = (-1/3, -4/3, -1/3), e_3^* = (-1/3, -1/3, -1/3)$.
2) On obtient $x = a - b + c, y = b - c, z = c$ donc $e_1^* = (1, -1, 1), e_2^* = (0, 1, -1), e_3^* = (0, 0, 1)$.
3) On obtient $x = b - c, y = b - a, z = a - b + c$ donc $e_1^* = (0, 1, -1), e_2^* = (-1, 1, 0), e_3^* = (1, -1, 1)$.

2 — On note (e_1, e_2, e_3) la base préduale.

1) $e_1 = (1/2, 0, -1/2), e_2 = (1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2)$.
2) $e_1 = (-2, 0, 1), e_2 = (0, 3, -2), (1, -2, 1)$.
3) $e_1 = (-1/2, 1/2, 1/2), e_2 = (1/2, -1/2, 1/2), (1/2, 1/2, -1/2)$.

3 — 1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 5 & -4 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) Comme la matrice est inversible, le système de vecteurs forme une base de $\mathbb{R}^4$. Sa base duale est donnée par les lignes de A^{-1}.

4 — On doit résoudre le système suivant pour tous $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, d'inconnues $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} x_n + x_1 &= y_1 && (1) \\ x_1 + x_2 &= y_2 && (2) \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots && (3) \\ x_{n-1} + x_n &= y_n. && (4) \end{aligned}$$

En effectuant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} L_k$, on obtient :

1) Si n est pair, la première ligne du système devient $0 = y_1 - y_2 + y_3 - \cdots - y_n$, donc le système n'est pas inversible. Ce n'est donc pas une base.
2) Si n est impair, la première ligne du système devient $2x_n = y_1 - y_2 + y_3 - \cdots + y_n$. On obttent alors $e_n = \frac{1}{2}(1, -1, 1, ..., 1)$ et les autres par substitution.

5 — 1) φ_a est clairement linéaire.

2) On montre que cette famille est libre : soit $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi_{a_i} = 0$. On a alors, pour $P_i = \prod_{j \neq i}(X - a_i)$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi_{a_i}(P_i) = \lambda_i \prod_{j \neq i}(a_j - a_i) = 0$, donc $\lambda_i = 0$. La famille est donc libre. Comme elle est de cardinal $n + 1 = \dim \mathbb{C}_n[X]$, c'est une base.
On a de plus, pour $Q_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i}(a_j - a_i)} \prod_{j \neq i}(X - a_i)$, $\varphi_{a_i}(Q_j) = \delta_{i,j}$, donc les Q_i sont la base préduale.
3) Comme $P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$ est une forme linéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$, ces coefficients existent. On a $\lambda_i = \int_0^1 Q_i(t)dt$.

6 — Ce sont bien des formes linéaires. Les polynômes $P_1 = \frac{1}{8}(9 - 15X^2), P_2 = \frac{1}{8}(75X - 105X^3), \frac{1}{8}(-15 + 45X^2), \frac{1}{8}(-105X + 175X^3)$ vérifient $f_i(P_j) = \delta_{i,j}$, et on en déduit donc que c'est une base et sa base préduale.

7 — Complétons x en une base de k^n, $(x, e_2, \ldots, e_n)$. Considérons sa base duale $(e_1^*, ..., e_n^*)$. Alors $f_1, ..., f_n \in \mathrm{Vect}(e_2^*, ..., e_n^*)$ qui est un s.e.v. dimension $n - 1$, et elle est donc liée.

8 — 1) f s'annule sur P si et seulement si $\begin{cases} f(e_1 - 2e_2 + e_3) = 0 \\ f(e_2 + e_3 + e_4) = 0 \end{cases}$

2) On trouve $a_2 = -a_3 - a_4$ et $a_1 = a_3 + a_4$.
3) Une base est par exemple donnée par $(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)$. Autrement dit $f_1(x, y, z, t) = x - y + z$ et $f_2(x, y, z, t) = x - y + t$. Les équations $x - y + z = 0$ et $x - y + t$ définissent P.
4) $\phi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) = 0 \Leftrightarrow x = -t, y = z + t$. Une base est donnée par $v_1 = (0, 1, 1, 0), v_2 = (-1, 1, 0, 1)$.

9 — 1) On a $\phi_i(X^j) = \delta_{i,j}$.

2) On a $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 & -\lambda^3 & \lambda^4 \\ 0 & 1 & -2\lambda & 3\lambda^2 & -4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 1 & -3\lambda & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Cette matrice est inversible car triangulaire à diagonale > 0 et c'est donc une base.

3) $u_\lambda : P \mapsto P(X-\lambda)$. On en déduit donc que $u_\mu \circ u_\lambda = u_{\lambda+\mu}$n et $u_\lambda^{-1} = u_{-\lambda}$.

4) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}_\lambda^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}_\lambda)^{-1}$.

10 —

11 —

12 —

13 —

14 — $(2x+a^2-b^2)(2x-a^2+b^2)$, $(a+b+c)^2$, $2abc(b-a)(c-a)(c-b)$, $(b-a)(c-a)(c-b)(ab+ac+bc)$, $-(b^3-a^3)^2$.

15 — 1) $(-1)^{n-1}$

2) $(n-1)(-1)^{n-1}$

3) $(b-a)(a+(n-1)b)(-1)^{n-1}$

16 — Si $\det(C) = 0$, alors A n'est pas inversible et la formule est bonne. Si $\det(C) \neq 0$, soit $f(M) = \det \begin{pmatrix} M & D \\ 0 & C \end{pmatrix} * \frac{1}{\det(C)}$. Alors on montre facilement que f est une forme n-linéaire alternée qui vérifie $f(I_p) = 1$, et on en déduit donc que $f = \det$. On a alors $\det(A) = f(B) = \det(B)/\det(C)$.

17 — $V(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

18 — $\frac{\prod_{i<j} a_j - a_i \prod_{i<j} b_j - b_i}{\prod_{i,j} a_i + b_j}$

19 —

20 —